数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 162-172

ON GOUVÊA'S CONJECTURES ON THE UNIVERSAL DEFORMATION RINGS OF RESIDUAL GALOIS REPRESENTATIONS

北大理　山上 敦士 (ATSUSHI YAMAGAMI)

0. はじめに

本稿では, 剰余 Galois 表現 の普遍変形環に関する Gouvêa の予想を特別な場合に定式化し, それらに関する主結果を述べる.

まず, ここで考えられる Gouvêa の予想とはどのようなものであるかを簡単に解説したい.

$p \geq 7$ を素数とし, S を p と ∞ を含む有理素点の有限集合とする. $G_{\mathbb{Q}}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群として,

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_p})$$

を既約であって, S の外不分岐な, ある保型形式に付随するモジュラーな剰余 Galois 表現とする.

本稿で考えたい予想というのは, だいたい次のようなものである:

'予想' $\bar{\rho}$ の勝手な S の外不分岐な変形は, (Katz の p 進固有関数に付随するという意味で) モジュラーな変形であろう. (以下, このような変形を Katz-モジュラーである, ということにする.)

Hida による [8] における "ordinary" な固有形式の族に付随する Galois 表現に関する結果を受けて, Mazur は [10] において, 特別な仮定を満たす ordinary な剰余モジュラー表現 ("special dihedral representation" という) に対する ordinary な変形はモジュラーであることを証明している (Prop. 14).

この段階では, 考える変形に対して "ordinary" という条件を付けているが, その後, Gouvêa は [4] において, Katz の p 進固有関数を用いることで, 変形に対してとくに条件をつけずに, この予想を定式化した. 本稿で対象とするのは, この Gouvêa による定式化である.

また, "ordinary" という条件のついた変形問題に関しても, Gouvêa により [5] で定式化された予想があり, 本稿で紹介したい主結果というのは, "非常に特別な場合に" これらの予想は正しい, といった内容のものである.

以下, 第 1 節では, Gouvêa による二つの予想を特別な場合に定式化し, 第 2 節で, これらの予想に関する主結果を述べたい.

1. Gouvêa の予想

1.1. 変形の定義と予想 1

ここでは, 剰余 Galois 表現の変形の定義をし, 本稿で紹介したい予想は二つあるが, まず一つ目の予想を特別な場合において定式化する.

$p \geq 7$ を素数とし, N を p と互いに素な正整数とする.

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

を絶対既約であって, $\mathbb{Z}_p$ 上定義された tame level N の古典的な固有形式 f に付随するモジュラーな剰余 Galois 表現とする.

$S = \{ Np$ の素因数 $\} \cup \{\infty\}$ とおくと, $\bar{\rho}$ は $\mathbb{Q}$ の S の外不分岐な最大 Galois 拡大の Galois 群 G_S を経由することがわかり, 経由した後の表現 $G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ のことも $\bar{\rho}$ と呼んで, 以下,

$$\bar{\rho} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

の変形問題を考える.

定義 (cf. [10]). A を $\mathbb{F}_p$ を剰余体とする完備局所 Noether 環とし, その極大イデアルを $\mathfrak{m}_A$ とする. $\bar{\rho}$ の二つの持ち上げ

$$\begin{array}{ccc} \rho,\ \rho' : G_S & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(A) \\ \bar{\rho} \searrow & & \downarrow \bmod \mathfrak{m}_A \\ & & \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \end{array}$$

が strictly equivalent であるということを, ある $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(A) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p))$ があって,

$$\rho'(\sigma) = M^{-1}\rho(\sigma)M \quad (\sigma \in G_S)$$

となることとする. そして, $\bar{\rho}$ の A への 変形 を, これらの持ち上げの strict equivalence class のこととする.

普遍変形環 (Mazur [10]).

Mazur は $\bar{\rho}$ の変形の間で普遍な完備局所 Noether 環 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ を定式化した. $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ には $\bar{\rho}$ の変形

$$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{univ}} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S))$$

が付随していて, 勝手な $\bar{\rho}$ の変形

$$\rho : G_S \to \mathrm{GL}_2(A)$$

に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)) \\ & \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{univ}} \nearrow & \downarrow \varphi \\ G_S & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}_2(A) \end{array}$$

が可換となる環準同型 $\varphi : \boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to A$ がただ一つ存在する.

<u>普遍 Katz-モジュラー変形環</u> (Gouvêa [4]).

$\bar{\rho}$ が付随している固有形式 f を Katz の p 進固有関数とみなすことで, Gouvêa により, 普遍 Katz-モジュラー変形環 $\boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ が構成された.

この環は, Katz-モジュラーな変形の間で普遍な環であり, $\mathbb{Z}_p$ 上定義された tame level N の Katz の p 進放物的保型関数全体のなす環 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{par}}(\mathbb{Z}_p, N)$ に作用する (制限された) Hecke 環 $\boldsymbol{T}_0^{\star}(\mathbb{Z}_p, N)$ を, f に対応する極大イデアルに関して完備化したものが $\boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ であるが, ここでは, 詳しいことは省くことにする.

さて, $\boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ を構成した際に Gouvêa は, 自然な環準同型

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$$

が全射であることを注意し, 次のような予想を述べた:

予想 1. 全射 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ は同型であろう. つまり, $\bar{\rho}$ の勝手な変形は Katz-モジュラーであろう.

この予想に関しては, Gouvêa-Mazur による次の結果が知られている:

定理 (Gouvêa-Mazur [7]). ($N = 1$ の場合における結果)
f のタイプを $(p, k, 1)_{\mathbb{Z}_p}$ とする (つまり, f はレベル p, 重さ k で自明な指標をもつ正規化された尖点固有形式). ここで, $k \geq 2$ とする. f の U_p-固有値 λ_p について,

$$0 < \mathrm{ord}_p(\lambda_p) < k - 1$$

と仮定し, さらに $\bar{\rho}$ に付随する随伴表現 $\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$ について,

$$H^2(G_S, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

と仮定すると, 予想 1 は正しい:

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \cong \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, 1).$$

この定理については, あとで主結果を紹介するときに, もう一度触れたいと思う.

注意. 仮定における条件

$$H^2(G_S, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

が満たされるとき, $\bar{\rho}$ の変形問題には 障害が無い, という.

このとき, $\bar{\rho}$ に対する普遍変形環 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ が $\mathbb{Z}_p$ を係数とする 3 変数の形式的巾級数環と同型になることが, Mazur によって示されている ([10], Prop. 2 と Cor. 3).

注意. この講演後に東大の落合理さんから, Böckle による $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \cong \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ に関するごく最近のプレプリント [1] があることを教えていただいた. その中で得られている結果が, 非常に注目すべきものであるので, ここで少し触れたいと思う.

Böckle は [1] において, Wiles [14], Taylor-Wiles [13] により示された "small rings" (すなわち, $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ や $\boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ の商環として表される "条件付き変形" の普遍変形環) の同型を用いて, "big rings" (すなわち, $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ と $\boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$) の同型を導くという手法を示している. この手法は, $\bar{\rho}$ に対していくつかの仮定をつけなければならないが, 変形の障害を許した状況でも用いることができるという点で, 非常に興味深いものである.

1.2. 予想 2

ここでは, 付随する固有形式のレベルが $\bar{\rho}$ の導手と一致するという状況で, [5] において Gouvêa により主張された予想を, 特別な場合に定式化する.

再び始めに戻って, 絶対既約な剰余 Galois 表現

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

から議論を始めたいと思う. $N = N(\bar{\rho})$ を $\bar{\rho}$ の導手とする (剰余 Galois 表現の導手の定義, またその性質については, [12] や [5] を参照のこと). そして, $\bar{\rho}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上定義されたレベル N の固有形式 f に付随すると仮定し, $S = \{\ Np$ の素因数 $\} \cup \{\infty\}$ とおけば, 前述したように $\bar{\rho}$ は G_S を経由することがわかり, 以下, 剰余 Galois 表現

$$\bar{\rho} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$$

の変形問題を考える.

普遍 "S^0-ordinary" 変形環 (Gouvêa [5]).

$S^0 = \{l \mid N$ の素因数, $\bar{\rho}$ は "l-ordinary."$\}$ とおく (表現が "l-ordinary" であるという定義については, [10] や [5] を参照のこと). このとき, Gouvêa は [5] において, 普遍 "S^0-ordinary" 変形環 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N)$ の存在を示した. ここで, S^0-ordinary 変形とは, S^0 に属する各素数において ordinary な変形のことで, $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N)$ は $\bar{\rho}$ の S^0-ordinary 変形の間で普遍な環である. (Gouvêa は, S^0-ordinary 変形の導手もま

た N となることも証明しているが, ここでは $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N)$ の性質に関する詳しい説明は省く.)

Gouvêa は, 予想 1 の自然な全射 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ が

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) & \longrightarrow & \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N) & \end{array}$$

と $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N)$ を経由することを示し, 次のような予想を述べた:

予想 2. 全射 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ は同型であろう. つまり, $\bar{\rho}$ の勝手な S^0-ordinary 変形は Katz-モジュラーであろう.

2. 主結果とそれらの証明の概略

この節において, 前節で定式化した Gouvêa の二つの予想に関する主結果と, それらの証明の概略を述べたい.

まず一つ目の定理は, 前述した予想 1 に対する Gouvêa-Mazur による定理を, レベル Np の場合へ一般化したものである. 定理の主張を述べる前に一つ, 言葉の定義をしたい:

定義. レベル Np の固有形式 f が new away from p であるとは, レベル Np の newform であるか, あるレベル N の newform から作られるレベル Np の oldforms からなる 2 次元のベクトル空間に, f が属していることをいう.

定理 1. N を p と素な正整数とする. f をタイプ $(Np, k, 1)_{\mathbb{Z}_p}$ で new away from p な固有形式とする. ここで, $k \geq 2$ とする. f の U_p-固有値 λ_p について,

$$0 < \mathrm{ord}_p(\lambda_p) < k-1, \quad (\lambda_p)^2 \neq p^{k-1}$$

と仮定し, さらに,

$$H^2(G_S, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

と仮定すると, 予想 1 は正しい:

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \cong \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N).$$

証明の概略. この定理は, [7] における Gouvêa-Mazur のレベル p の場合での議論を, レベル Np の場合へ一般化して得られる. ここでは, 講演で詳しく触れることのできなかった, 証明に用いる大切な '道具' である "Coleman の族" と "infinite fern" について紹介したい.

Coleman の族 (Coleman [2], [3]).

いま仮定で与えられている固有形式 f は, レベル Np, 重さ k で, 自明な指標をもつ, $\mathbb{Z}_p$ 上定義された new away from p な固有形式であり, $\alpha := \mathrm{ord}_p(\lambda_p)$ が $k-1$ よりも小さいものとしている.

一般に, p 進数係数の固有形式 f の, p 番目の Hecke 作用素 (レベルが p で割り切れるときは U_p, p と素なときには T_p と表記する) に対する固有値 λ_p の p 進付値 $\mathrm{ord}_p(\lambda_p)$ のことを, f の slope という.

[3] において Coleman は, f と同じレベル, 指標を持ち, slope も f と同じ α であるような, $\mathbb{Z}_p$ 内の k を含むある開円盤 D により重さがパラメトライズされる, $\mathbb{Z}_p$ 上定義された "overconvergent" な固有形式からなる族を構成した. この族のことを, Coleman の族 という (Cor. B. 5.7).

次に解説する "infinite fern" の構成において, Coleman の族の性質の中で重要となるのは, この族をなす固有形式のうちで, 古典的なものは全て new away from p なレベル Np の固有形式である, というものである.

この族をなす固有形式 $f_d = \sum_{n\geq 1} a_n(d)q^n$ $(d \in D)$ 達の Fourier 展開の係数 $a_n(d)$ は, 各 n ごとに, D 上の p 進解析的な関数で与えられていて, とくに, $k' \in D \cap \mathbb{Z}, k' > \alpha + 1$ に対しては, $f_{k'}$ たちが全て古典的な重さ k' の固有形式であって, 付随する剰余 Galois 表現は f と同じく $\bar{\rho}$ であるとみなすことができる. すなわち, $f_{k'}$ に付随するモジュラーな Galois 表現

$$\rho_{k'} : G_S \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$$

は, $\bar{\rho}$ の $\mathbb{Z}_p$ への変形となっているのである.

infinite fern (Mazur [11]).

$\bar{\rho}$ に対して,

$$X := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p\text{-alg}}(\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S), \mathbb{Z}_p)$$

を, $\bar{\rho}$ の 普遍変形空間 という. これは, $\bar{\rho}$ の $\mathbb{Z}_p$ への変形全体を表していて, いま考えているように, 変形問題に障害が無い状況では,

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \cong \mathbb{Z}_p[\![t_1, t_2, t_3]\!]$$

であることが知られているから ([10]),

$$X \cong p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p$$

となり, これをもって X を 3 次元の p 進多様体とみなすことができる.

この 3 次元の普遍変形空間 X 内には, p 進開円盤 D を必要ならば小さくとることで, Coleman の族をなす固有形式に付随する $\bar{\rho}$ の $\mathbb{Z}_p$ への変形達からなる 1 次元のモジュラーな曲線が描かれる. この

X 内の slope α の曲線のことを C_α と書くことにする (Figure 1 を参照).

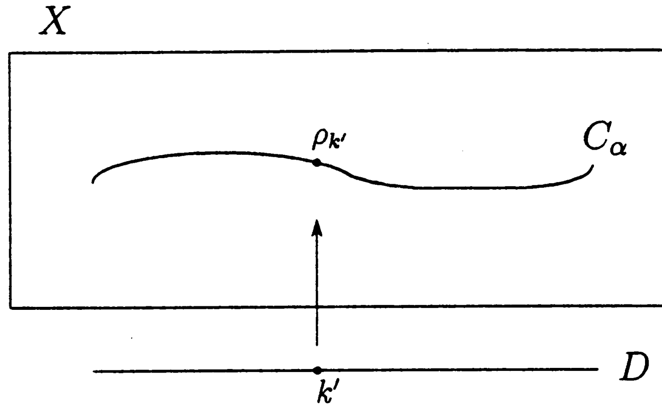

FIGURE 1. X 内のモジュラーな曲線 C_α

さて, X 内に infinite fern を構成することを解説するためには, new away from p なレベル Np の固有形式 f に対して "twin" と呼ばれる, f と対をなすレベル Np の固有形式について説明しなければならない.

oldform, newform と slope との関係から, D を必要ならばさらに小さくとることで, D 内で稠密な整数列 K で, 全ての $k' \in K$ に対し, 固有形式 $f_{k'}$ は古典的で new away from p なレベル Np の oldform となっている, というものをとることができる. 後々のために, $2\alpha+1 \notin D$ ともしておく.

new away from p な固有形式 $f_{k'}$ が oldform であるということは, あるレベル N の newform から作られる 2 次元の空間内に属していることになるが, $f_{k'}$ は正規化された固有形式なので, この 2 次元空間の基底の一つとなっている. そして, もう一つの正規化された固有形式で $f_{k'}$ とともに基底をなす $f'_{k'}$ のことを $f_{k'}$ の twin と呼ぶのである (具体的な構成法については, 定理 2 の証明の概略を参照のこと).

この twin $f'_{k'}$ は, $f_{k'}$ とレベル, 重さが同じであるが, 大切なことは, $f'_{k'}$ の slope を α' とおいたときに,

$$\alpha + \alpha' = k' - 1$$

となることであり, いま $k' \neq 2\alpha+1$ であるから, $f_{k'}$ と $f'_{k'}$ の slope は互いに相異なる. さらに, twin の構成法から, 付随する $\mathbb{Z}_p$-係数の Galois 表現が $f_{k'}$ のものと同じであるとみなしてよいことがわかり, X 内においては, $f_{k'}$ と $f'_{k'}$ は同じ点 $\rho_{k'}$ を与えることになる. そして, f に対するのと同様に $f'_{k'}$ に対しても, これを含む slope α' の Coleman の族が構成されて, この族から X 内に描かれる slope α' の

曲線 $C_{\alpha'}$ は 点 $\rho_{k'}$ で C_α と交わり, slope が相異なることから, この一点だけでしか交わらないことが証明される ([11], section 17).

いま解説した, twin をとり, それを通る Coleman の族を用いて X 内にモジュラーな曲線を描く, という操作を $k' \in K$ を走らせて繰り返すことで, C_α と一点だけで交わる曲線を無限に描くことができる (Figure 2 を参照).

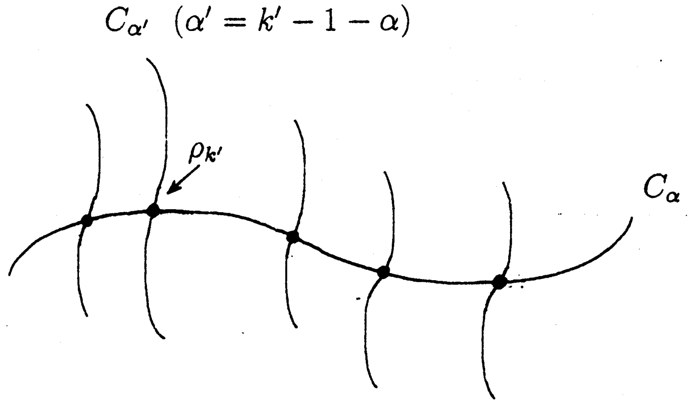

FIGURE 2. C_α と交わる曲線 $C_{\alpha'}$ 達

また, twin から得られる曲線 $C_{\alpha'}$ を軸に今までの操作を繰り返すことで, X 内に無限個のモジュラーな曲線からなるメッシュを描き続けることができる. この操作の結果として得られるであろうモジュラーな点の無限族のことを, X 内に描かれた <u>infinite fern</u> と呼ぶ (infinite fern の構成に関する解説については, [11] を参照のこと. 因みに, 'fern' とは 'シダ植物' という意味. Figure 3 を参照).

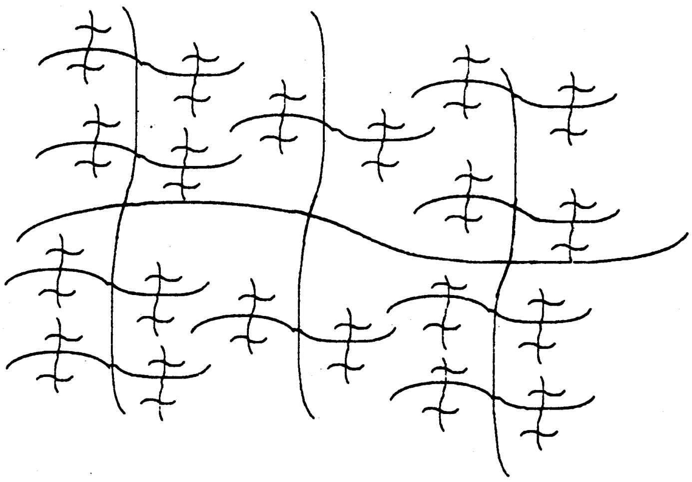

FIGURE 3. X 内に描かれた infinite fern

さて, 定理の証明の方針は, この infinite fern を用いることで, $\bar{\rho}$ の普遍変形空間 X 内に, モジュラーな点たちが稠密に入っていることを示すことであり, この稠密性から環の同型

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \cong \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$$

を得るのである (infinite fern を用いた稠密性の証明については, [7] を参照のこと). □

この定理を, 導手をレベルとする剰余モジュラー表現に応用することで, 予想 2 に対する次の定理を得る:

定理 2. $N = N(\bar{\rho})$ を $\bar{\rho}$ の導手とし, f のタイプを $(N, k, 1)_{\mathbb{Z}_p}$ とする. ここで, $k \geq 2$ とする. f の T_p-固有値 A_p について,

$$\mathrm{ord}_p(A_p) > 0$$

であって, $\mathbb{Z}_p$-係数の 2 次多項式

$$X^2 - A_p X + p^{k-1}$$

は $\mathbb{Z}_p$ 内に単根を持つと仮定する. さらに,

$$H^2(G_S, \mathrm{Ad}(\bar{\rho})) = 0$$

と仮定すれば, 予想 2 は正しい:

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N) \cong \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N).$$

証明の概略. 予想 2 を紹介した際に考えた可換図式

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) & \longrightarrow & \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N) & \end{array}$$

において, まず, 環準同型

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N)$$

が全射であることを示し (1), その上で, 定理 1 を用いることで, 自然な全射

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$$

が同型であることを示す (2). そうすれば, 上の可換図式において, 全射

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$$

が同型であることがわかる.

(1) 環準同型 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N)$ が全射であること, すなわち, 普遍 S^0-ordinary 変形環 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, N)$ が普遍変形環 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ の商環として表されることを示すために, Lenstra-de Smit により [9] の section

6 において得られた判定条件を用いる. いま考えている S^0-ordinary という条件が, この判定条件を満たすことは容易に確認することができ, 欲しい全射性が得られるのである.

(2) 次に, 定理 1 を応用することで, 自然な全射 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ が同型であることを示す. 仮定において, $\bar{\rho}$ が付随する固有形式 f のレベル N が丁度 $\bar{\rho}$ の導手であることから, f はレベル N の newform であることがわかる ([5], Lemma 7, もしくは, [1], Theorem 2.8 を参照).

多項式 $X^2 - A_p X + p^{k-1} = 0$ の根を λ_1, λ_2 とおくと, 仮定により, これらは $\mathbb{Z}_p$ の相異なる元であり,

$$0 < \mathrm{ord}_p(\lambda_i) < k-1 \quad (i = 1, 2)$$

がわかる.

レベル N の newform f に対し, Hecke 固有形式

$$g_1 = f - \lambda_2 \cdot f|B_p,$$
$$g_2 = f - \lambda_1 \cdot f|B_p$$

たちは, f から作られるレベル Np の oldforms からなる 2 次元のベクトル空間の基底をなす. ここで, B_p は保型形式の Fourier 展開に対して,

$$(f|B_p)(q) = f(q^p)$$

と作用する作用素である. これらの固有形式のことを f から生じる twins と呼ぶ. (定理 1 の証明の概略の中でも触れた. cf. [6], [11].)

l を Np と素な素数としたとき, g_i たちの Hecke 作用素 T_l に対する固有値が, f のものと同じであることから, 剰余モジュラー表現 $\bar{\rho}$ が g_i に付随しているとみなすことができる.

いまの状況では, レベル Np の固有形式 g_i が定理 1 の仮定を満たすことがわかるので,

$$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \cong \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$$

を得ることができる. □

謝辞. この研究集会における講演の機会を与えて下さった, 伊原康隆先生に心より感謝申し上げげます. また, Böckle の興味深いプレプリント [1] を教えてくださった, 落合理さんに深く感謝いたします.

References

[1] G. Böckle, On the density of modular points in universal deformation spaces, preprint.

[2] R.F. Coleman, Classical and overconvergent modular forms, *Invent. Math.* **124** (1996), 215-241.

[3] R.F. Coleman, P-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), 417-479.
[4] F.Q. Gouvêa, "Arithmetic of p-adic Modular Forms," Lecture Notes in Math., Vol. 1304, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988.
[5] F.Q. Gouvêa, Deforming Galois representations: controlling the conductor, *J. Number Theory* **34** (1990), 95-113.
[6] F.Q. Gouvêa and B. Mazur, Families of modular eigenforms, *Math. Comp.* **58** (1992), 793-805.
[7] F.Q. Gouvêa and B. Mazur, On the density of modular representations, pp. 127-142, *in* "Computational perspectives on number theory," AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **7** (1998).
[8] H. Hida, Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[\![X]\!])$ attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), 545-613.
[9] H. W. Lenstra and B. de Smit, Explicit construction of universal deformation rings, pp. 313-326, *in* "Modular Forms and Fermat's Last Theorem" (G. Cornell, J. H. Silverman, and G. Stevens, Eds.), Springer-Verlag, New York, 1997.
[10] B. Mazur, Deforming Galois representations, pp. 385-437, *in* "Galois Groups over $\mathbb{Q}$" (Y. Ihara, K.Ribet, and J.-P. Serre, Eds.), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1989.
[11] B. Mazur, An "infinite fern" in the universal deformation space of Galois representations, *Collect. Math.* **48** (1997), 155-193.
[12] J.-P. Serre, Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Duke Math. J.* **54** (1987), 179-230.
[13] R. Taylor and A. Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *Ann. of Math.* **141** (1995), 553-572.
[14] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, *Ann. of Math.* **142** (1995), 443-551.

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo, 060-0810, Japan

E-mail address: yamagami@math.sci.hokudai.ac.jp